

ОУ (кратко)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), u \in V \\ x(t_0) \in M_0, x(t_1) \in M_1 \\ J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x, u) dt \rightarrow \min_{u \in D_V} \end{cases}$$

постановка задачи

V -каскакт.

D - класс допустимых управлений, если

1) $u \in D \Rightarrow u$ - измерима и ограничена

2) $u \in D, v \in V \Rightarrow \forall t', t''; t_0 \leq t' < t'' \leq t_1$
 $u_1(t) = \begin{cases} v & t' < t \leq t'' \\ u(t) & \text{иначе} \end{cases} \in D$

3) $[t_0, t_1]$ разбит на конечное число отрезков, на каждом из которых u - постоянно, то $u \in D$ и наоборот.

4) $u \in D, t \in [t_0, t_1] \Rightarrow v(t) = u(t-\alpha)$ на $[t_0+\alpha, t_1]$ допустимо.

Примеры:

• D_{max} - измеримы и о.г. на некотором отрезке.

• D_{min} - мн-во всех кусочно-постоянных управлений непрерывных слева

• Множество всех кус-непрерывных слева управлений, т.е. кусочно непрерывных, для которых $u(t-\alpha) = u(t)$ для всех $t \in (t_0, t_1]$ и $u(t_0+\alpha) = u(t_0)$

$$\begin{cases} \text{Если } f(x, u) = Ax + u \text{ (линейная ф.)}, \text{ то} \\ x(t) = e^{tA} x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} u(s) ds \end{cases}$$

т.е. Пусть в задаче (*) $\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ выполняются:

1) $f(x, t)$ о.г. и непрерыв. по x для п.в. t .

2) $f(x, t)$ измерима по t $\forall x$

3) $|f(x, t)| \leq m(t)$, где $m(t)$ - суммируемая ф.-я.

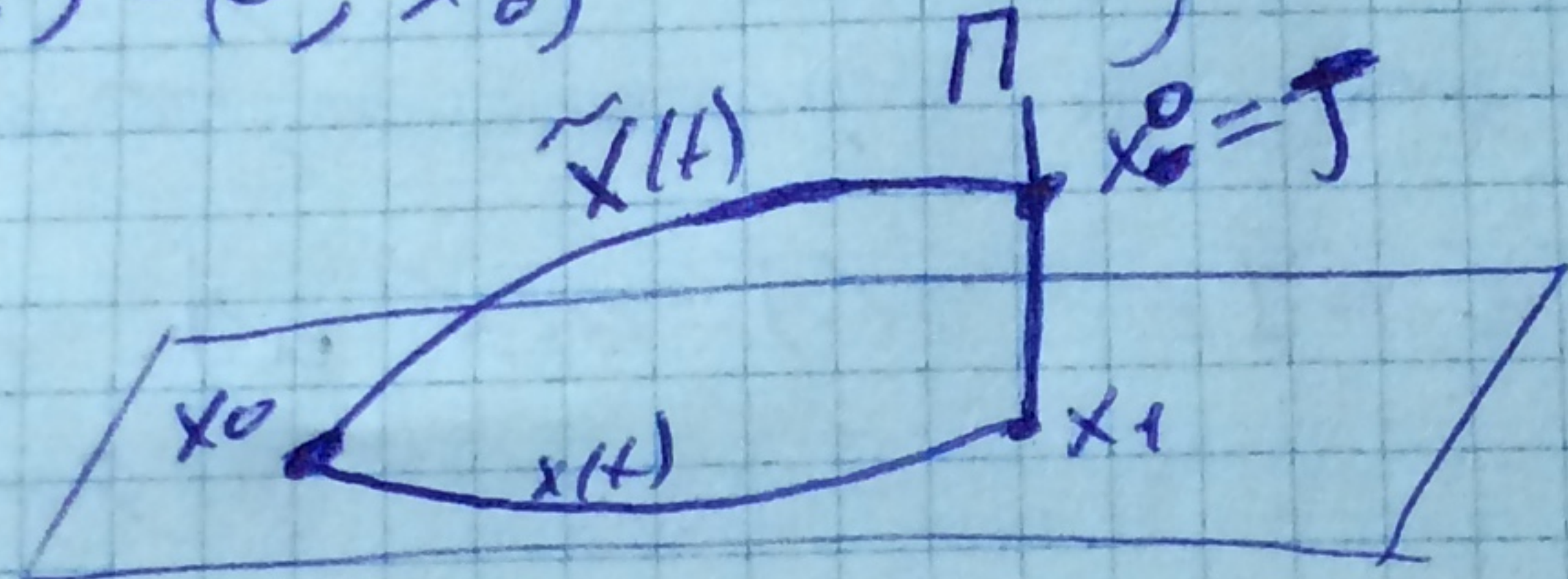
Тогда $\exists \varepsilon > 0$: на $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ $\exists$ абс. непрерыв. $x(t)$ решение задачи (*), ~~т.е.~~

А если еще $\forall x, y \quad |f(x, t) - f(y, t)| \leq L(t) |x - y|$,
 где $L(t)$ - суммируемая ф-я,
то решение единственно.

Важно! За счет вып. f и $\frac{\partial f}{\partial x}$ (и x, u) - по свойствам переноса. Пусть еще и f^0 заданы так-же.

Расширенная задача

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= f^0(x_1, \dots, x_n, u) \\ \dot{x} &= \tilde{f}(x, u) \\ x(t_0) &= (0, x_0)^T \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^t \tilde{f}(x(s), u(s)) ds \\ x(t) \end{pmatrix}$$



Множество достижимости

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{x} = f(x, u), u \in U \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$X(t) = \{y \in R^n : y = x(t), \dot{x}(s) = f(x(s), u(s)), u \in U, s \in [t_0, t], x(t_0) = x_0\}$$

Условия ограниченности:

- $\|f(x, u)\| \leq A \|x\| + B$
- $\langle f(x, u), x \rangle \leq A \|x\|^2 + B$

4.с.)

УТВ Если вып. усл. опр., то все траектории упр. ~~сист~~ системы равномерно ограничены на заданном $[t_0, t_1]$

Лемма Пусть на $[t_0, t_1]$ задана вып. вектор ф-я $x(t)$, и для некоторых чисел $P, Q \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1] \Rightarrow$
 $\|x(t)\| \leq P + Q \int_{t_0}^t \|x(s)\| ds$
 Тогда $\forall t \in [t_0, t_1] \Rightarrow \|x(t)\| \leq P e^{Q(t-t_0)}$

Th 1 Пусть в упр. системе $\bar{U}$ - компакт и
выполнено усл. ограниченности (V).
Тогда $\bar{X}(t)$ - непрерывно зависящий от t
компакт.

Th 2
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) & u \in U \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Пусть вып.:

- 1) U - компакт
- 2) вып. $\forall$ усл. оцр.
- 3) мн-во $F(x) = f(x, U) = \{y \in E^n : y = f(x, u), u \in U\}$ выпукло.

Тогда $\forall t \in [t_0, t_1]$ мн-во достижимости
 $X(t)$ явл. вып. компактом.

Опр $F(x)$ - векторграмма скоростей

Th 3 (Элем. задачи быстродействия)

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \\ t_1 - t_0 \rightarrow \min_{u \in D_u} \end{cases}$$

Пусть в задаче — выполнено:

- 1) U - компакт.
- 2) вып. усл. ограниченности (V)
- 3) $F(x) = f(x, U)$ - вып. компакт
- 4) система управляема из x_0 в x_1 .

Тогда $\exists$ оптимальное по быстродействию управление

! Дана система, что D - класс кусочно-непр. управляемых

Нужно найти управляющее м-во достигнута, выключив, чтобы восстановиться тк од отделимости так же как и в АМГ

Рассмотрим случай непрерывного на $[t_0, t_1]$ управления:

$$\dot{x} = f(x, u(t)) = \varphi(x, t)$$

$\Rightarrow$ в силу наших предположений $\exists$! решение $x(t)$

отклонившись от x_0 на $\varepsilon \Rightarrow$ по $(t, h$

о дифф. и непр. зависимости решения дифф. ур. от нач. условий)

$\exists$ решение ур-я $x(t_0) = z$ на $[t_0, t_1]$

Обозначим его за $x(t, z, t_0)$.

из непрерывности $\Rightarrow$ разложим

$$x(t, z, t_0) = x(t, x_0, t_0) + \frac{\partial x}{\partial z} \Big|_{(t, x_0, t_0)} (z - x_0) + o(\|z - x_0\|)$$

$$z = x_0 + \varepsilon h + o(\varepsilon)$$

переносим $x(t)$ влево и дифф. по t обе

заменяем h по формуле: $\varphi(x_1) - \varphi(x_2)$

получим систему уравнений $\dot{y}(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{(x(t), x_0, t_0), t} \cdot y$

$$\text{где } y(t) = \frac{\partial x}{\partial z} \Big|_{(t, x_0, t_0)} h$$

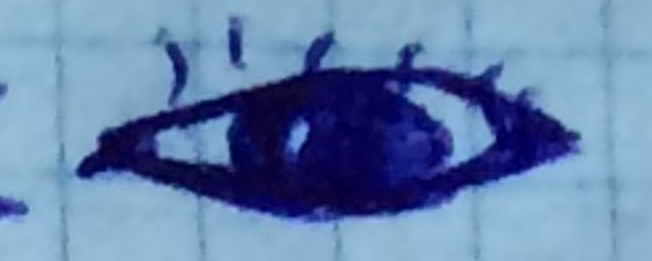
или:

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x(t), x_0, t_0, u(t)} y \\ y = h \end{cases}$$

система уравнений в матрицах

система управлений в вариациях определяет оператор A_{t_0, t_1}

$$y(t_1) = A_{t_0, t_1} y(t_0).$$

- 1) линейный. (из вида )
- 2) непрерывный (из 1)
- 3) ~~тогда~~ A_{t_0, t_1} - гомеоморфизм
- 4) $\forall t, s, \tau \in [t_0, t_1]$ верно $A_{t_0, s} A_{s, \tau} = A_{t_0, \tau}$

Лемма $\exists y(t)$ - решение системы $\dot{y} = A(t)y$ в вариациях

$\psi(t)$ - решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = - \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial x}(x(t), u(t)) \psi$$

Тогда $\langle \psi(t_1), y(t_1) \rangle = \text{const} \quad \forall t \in [t_0, t_1]$

Вариация решения u^* для u : $\exists \varepsilon > 0$:
 $|u(t) - u^*(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t_1]$

Для открытых мн-в.

U не компактно, поэтому $= \emptyset$

$u(t)$ - допустимое управление на $[t_0, t_1]$, τ - точка непрерывности

$$\delta > 0, \varepsilon > 0, \nu \in U$$

$$\text{введем } J(\tau, \delta, \varepsilon) = (\tau - \varepsilon\delta, \tau]$$

Будем говорить, что $u^*(t)$ получено из $u(t)$ при помощи бесконечно малой вариации Максвелла

$$M(\tau, \delta, \nu, \varepsilon), \text{ если: } u^*(t) = \begin{cases} \nu, & t \in J(\tau, \delta, \varepsilon) \\ u(t), & \text{иначе} \end{cases}$$

тут u^* - допустимое управление (очевидно) - нет!

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Вопрос показывается что траектории} \\ \text{немного отличаются} \\ \text{Вроде бы} \end{array} \right.$

Условия $\Rightarrow$

$$J_k = (\tau - \varepsilon(\delta_1 + \dots + \delta_{s-k+1}), \tau - \varepsilon(\delta_1 + \dots + \delta_{s-k}))$$

$$J_s = (\tau - \varepsilon\delta_1, \tau]$$

$k = \overline{1, s-1}$

$$u^*(t) = \begin{cases} v_k, & t \in J_k \\ u(t), & t \in [t_0, t_1] \setminus \bigcup J_k \end{cases}$$

Варианты максимизации $M(\tau, \delta_1, \dots, \delta_s, v_1, \dots, v_s, \varepsilon)$

далее определяя хрест с введением

Пусть теперь у нас есть n вариантов максимизации с суммой ε . Пусть $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_1$

Многомерные варианты — направленные приложения $M_1, \dots, M_n$

$\}$ интегрируемые приложения φ -м...

$$\varphi(M) = A_{t_1, t_1} \{1, t_1\} + \dots + A_{t_n, t_n} \{n, t_n\}$$

$$x^*(t_1) - x(t_1) = \varepsilon [A_{t_1, t_1} \{1, t_1\} + \dots + A_{t_n, t_n} \{n, t_n\}] + o(\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon \varphi(M) + o(\varepsilon).$$

Совокупность всех векторов $\varphi(M)$ для $\forall M$ обозначается K . — конус касательных направлений к лм-ву достижимости в точке $x(t_1)$

Определим сложные варианты:

$$M(\tau, \delta, v, \varepsilon) ; M'(\tau', \delta', v', \varepsilon')$$

если $\tau = \tau'$, то $M_{res} = M(\tau, \delta, \delta', v, v', \varepsilon)$

Итак как многомерные варианты применим ... (очередь) ...

$$\varphi(M + M') = \varphi(M) + \varphi(M')$$

условия

При целом числах λ — так же как
 При многочленах λ — по базисным элементам

$$\varphi(\lambda M) = \lambda \varphi(M) \in K.$$

(X) для определённой продолжения $M(t, \lambda \delta, \sigma, \epsilon)$
 $M(t, \lambda \delta, \lambda \delta, \sigma_1, \sigma_2, \epsilon)$
многочлена $\sim (\lambda M_1, \dots, \lambda M_n)$

$\lambda \in K$ — выпуклый конус

$[a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, M - \text{в.м.}, u - \text{функция на } [t_0, t_1])$

$\boxed{a > 0}$ $\left\{ \begin{array}{l} u^*(t) \text{ на } [t_0, t_1 + \epsilon a] \text{ является} \\ \text{применением функции } V(M, \alpha), \\ \text{если на } [t_0, t_1] u^* \text{ имеет смысл в.м.} \\ \text{А на } [t_1, t_1 + \epsilon a] u^*(t) = u(t_1) \end{array} \right.$
 (при $t \in$)

В этом случае:

$$\begin{aligned} x^*(t) &= x^*(t_1) + \int_{t_1}^t f(x^*(s), u(t_1)) ds = \\ &= x^*(t_1) + (t - t_1) f(x^*(t_1), u(t_1)) + o(\epsilon) = \\ &= x^*(t_1) + (t - t_1) f(x(t_1), u(t_1)) + o(\epsilon) \end{aligned}$$

$\boxed{a < 0}$ аналогично (но не)
 (остается так же)

В обоих случаях в точке $t_1^* = t_1 + \epsilon a \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x^*(t_1^*) &= x^*(t_1) + \epsilon a f(x(t_1), u(t_1)) + o(\epsilon) = \\ &= x(t_1) + \epsilon (\varphi(M) + a f(x(t_1), u(t_1))) + o(\epsilon) \\ &= x(t_1) + \epsilon \varphi(V(M, \alpha)) + o(\epsilon) \end{aligned}$$

$$\text{где } \varphi(V(M, \alpha)) = \varphi(M) + \alpha f(x(t_1), u(t_1))$$

ЗАЧЕМ ВСЕ ЭТО ???

Сумма подобных браций $\oplus V(M_{1,2}, \alpha_{1,2}) = V(M_1 + M_2, \alpha_1 + \alpha_2)$

Произведение $\lambda V(M, \alpha) = V(\lambda M, \lambda \alpha)$

Про это ? очевидно? 1) $\varphi(V(M_1, \alpha_1) + V(M_2, \alpha_2)) = \varphi(0) + \varphi(0)$

$$2) \varphi(\lambda V(\cdot)) = \lambda \varphi(V(\cdot))$$

Поэтому вот, это выпуклый конус.

оп } Мн-во K всех векторов $\varphi(V(M, \alpha))$ для
всех возможных браций $V(M, \alpha)$ — ~~выпуклый конус~~
расширенный конус касательных направлений к
мн-ву достижимости $X(t_1)$ в точке $x(t_1)$

Лемма

Пусть $M \subset R^n$ — вып. компакт;

$f: M \rightarrow R^n$ — непрерывное отображение

$x_0 \in \text{int } M$.

Пусть еще $\forall x \in \partial M \Rightarrow \|f(x) - x\| \leq \|x - x_0\|$

Тогда $x_0 \in f(M)$.

Следствие

Пусть

$M \subset R^n$ — вып. компакт,

$f_\varepsilon: M \rightarrow R^n$ — непрерывно

$x_0 \in \text{int } M$

Пусть еще $(f_\varepsilon(x) - x) \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$)
равномерно по $x \in M$.

Тогда $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0 \Rightarrow x_0 \in f_\varepsilon(M)$

Следствие

Пусть

$M \subset R^n$ — вып. компакт.

$f_\varepsilon: M \rightarrow R^n$ — непрерывно,

P — нехотый компакт $P \subset \text{int } M$,

$(f_\varepsilon(x) - x) \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) равномерно по $x \in M$

Тогда

$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow P \subset f_\varepsilon(M)$

Св-ва конуса раск-льных напр-ий

опр Γ в R^n заданы точки $a_0, a_1, \dots, a_n$ и $\varepsilon \begin{pmatrix} a_1 - a_0 \\ a_2 - a_0 \\ \vdots \\ a_n - a_0 \end{pmatrix}$ лнз

Симплекс S — $\text{conv}(a_0, \dots, a_n)$.

$$S = \left\{ y \in R^n : y = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i ; \lambda_i \geq 0 ; \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

опр λ_i — барицентрические координаты

опр центр симплекса — точка, где все λ_i равны.

лн 4 . Пусть $(u(t), x(t))$ — допустимая пара в задаче

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), u \in U \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

на $[t_0, t_1]$, и $x(t_1) \in \partial X(t_1)$

Тогда $0 \in \partial K$.

лн 5 Пусть $\tilde{x}(t)$ — оптимальная траектория расширения задачи, соответствующая опт. управлению $u(t)$

Тогда отрицательная направленная ось x^0 не содержится в $\text{int } \tilde{C}$

(C — конус рас. напр., $\tilde{C}$ — расширенной)

Принцип максимума Понтрякина
Необходимые условия экстремала на граничной м-ва достига

Введем ф-ю Гамильтона

$$H(x, \psi, u) = \langle \psi, f(x, u) \rangle =$$

$$M = \max_{u \in U} H(x, \psi, u)$$

$$= \sum_{i=1}^n \psi_i f_i(x, u)$$

Принцип максимума

Пусть $(u(t), x(t))$ - допустимая пара в задаче
на отрезке $[t_0, t_1]$

и $x(t_1) \in \mathcal{O} X(t_1)$ ~~тогда~~

Тогда $\exists$ ф-я $\psi(t) \neq 0$:

$$\dot{\psi} = - \frac{\partial H(x, \psi, u)}{\partial x} \bigg|_{\substack{x=x(t) \\ u=u(t)}} = - \frac{\partial S^*}{\partial x}(x(t), u(t)) \psi$$

и $H(x(t), \psi(t), u(t)) = M(x(t), \psi(t)), \forall t \in [t_0, t_1]$

Кроме того $M(t) = \text{const}$ на $[t_0, t_1]$

Св-ва конца ...

Лемма об отделимости отрезка направленной оси x^0 и расширенного конца ..., как нибудь, условие оптимальности (или более)

ПМП — необходимое условие оптимальности в задаче с интегрированным функционалом

Рассмотрим ЗД OU , в кот. $M_0 = \{x_0\}$, $M_1 = \{x_1\}$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), & u \in U \\ x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1, \\ J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x, u) dt \rightarrow \min_{u(\cdot) \in D(U)} \end{cases} \quad (*)$$

Введем обозначения: $Jl(x, \bar{\psi}, u) = \langle \bar{f}(x, u), \bar{\psi} \rangle =$
 $= \psi_0 f^0(x, u) + H(x, \bar{\psi}, u)$

$$M(x, \bar{\psi}) = \max_{u \in U} Jl(x, \bar{\psi}, u)$$

очевидно, что $\dot{\bar{\psi}} = - \frac{\partial Jl}{\partial x}$

Теорема 7 Пусть $(u(t), x(t))$ — оптимальная пар. в задаче $(*)$ на $[t_0, t_1]$

Тогда $\exists$ решение $\bar{\psi}(t) \neq 0$ расширенной сопряженной системы,

для которого:

1) Выполнены ПМП $\forall t \in [t_0, t_1]$

$$Jl(x(t), \bar{\psi}(t), u(t)) = M(x(t), \bar{\psi}(t))$$

2) Вып. соотношения: $\psi_0(t_1) \leq 0$

$$M(x(t_1), \bar{\psi}(t_1)) = 0$$

3) Всюду на отрезке $[t_0, t_1]$

$$\psi_0(t) = \text{const}$$

$$M(x(t), \bar{\psi}(t)) = \text{const}$$

Св-ва конуса

Теорема 8

Пусть $(u(t), x(t))$

- оптимальная пара

в задаче динамического:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \\ t_1 - t_0 \rightarrow \min \\ u \in D(x) \end{cases}$$

Тогда

$\exists$ решение $\psi(t) \neq 0$ сопряженной системы, для которого веродуют $[t_0, t_1]$

выполняются:

- 1) $H(x(t), \psi(t), u(t)) = H(x(t), \psi(t))$
- 2) $H(x(t), \psi(t)) = \text{const} \geq 0$

опр Определение гиперплоскости (см. осн. лемма)

опр Гиперповерхность пр-ва X : мн-во $S = \{x \in G : f(x) = 0\}$

опр особая точка (где $\text{grad} f \equiv 0$) гиперповерхности

опр Гладкая гиперповерхность - нет особых точек.
Будем считать, что у нас все гладкие

опр если $f(x) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b$,
то S - гиперплоскость

опр Нормаль к S в x_0 . ($\text{grad} f(x_0)$)

опр касательная гиперплоскость - $\text{grad} f(x)$ - нормаль, проходит через x_0 .

опр $(n-k)$ -мерное гладкое многообразие в X -
пересечение $M = \bigcap_{i=1}^k S_i$ - гиперповерхностей,
если $\forall$ точки $x \in M$ векторы $\text{grad} f_1(x), \dots, \text{grad} f_k(x)$ лнз

опр Если все S_i - гиперплоскости,
то M - плоскость $(n-k)$ -мерная

опр касательная $(n-k)$ -мерная плоскость к многообразию M в точке x - пересечение касат. гиперплоскостей

СВ-В. 10.10.11

Рассмотрим ЗОД. ОУ с подвижными концами;

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x(t_0) \in S_0; \quad x(t_1) \in S_1. \end{cases} \quad (*)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min_{u(t) \in D_0}$$

S_0 и S_1 - заданные множества размерности n_0, n_1 ,
 $n_0, n_1 < n$

T_0 и T_1 - кас. плоскости размерностей n_0 и n_1
 в S_0 и S_1 , проведенные в точках x_0 и x_1

Опр вектор $\psi(t_1)$ удовлетворяет условию трансверсальности
 на правом конце траектории $x(t)$, если $\psi(t_1) \perp T_1$,
 т.е. $\forall$ векторы $\beta \parallel T_1 \Rightarrow \langle \psi(t_1), \beta \rangle = 0$
 Аналогично на левом конце $x(t)$.

Условия трансверсальности позволяют написать $n_0 + n_1$ соотно-
 шений, связывающих координаты конечных точек x_0 и x_1 ,
 кол-во неизвестных параметров тоже увеличилось
 на $n_0 + n_1$.
 ... Значит ли?

т.н. 9 ПММ для задачи с подвижными концами

Пусть $(x(t), u(t))$ - оптимальный пар в ЗОД (*)

Тогда $\exists$ вектор $\bar{\psi}(t) \neq 0$, являющийся решением
 уравнения $\dot{\bar{\psi}}(t) = - \frac{\partial H(x(t), \bar{\psi}(t), u(t))}{\partial x}$

такой, что выполняются:

- 1) $\forall t \in [t_0, t_1] \quad H(x(t), \bar{\psi}(t), u(t)) = M(x(t), \bar{\psi}(t))$
- 2) $\psi_0(t_1) \leq 0; \quad M(x(t_1), \bar{\psi}(t_1)) = 0;$
 $\psi_0 = \text{const.}$
- 3) $\bar{\psi}(t_1)$ удовл. усл. трансверсальности на правом к.
 а $\bar{\psi}(t_0)$ на левом.

ЗОД-100

Решение ЗОД и (*)

Задача с неавтономной системой (зависит от t)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases} \quad (*)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \min_{u(t) \in D_u}$$

сделаем x автономным путем, введя еще координату $x_{n+1}(t) = t$, $x_{n+1}(t_0) = t_0 \Rightarrow x_{n+1} = t$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), x_{n+1}) \\ \dot{x}_{n+1}(t) = 1 \end{cases}$$

$$x^* = (x, x_{n+1})^T, \quad f^* = (f, 1)^T, \quad x_0^* = \dots, \quad (x(t_1), x_{n+1}(t_1))^T \in S_1$$

S_1 - прямая, проходящая через $(x_1, 0)^T$ и параллельная оси x_{n+1}

т.о мы получили ранее рассм. задачу.

Сопутствующий вектор $\bar{\psi}$ имеет вид:

$$\bar{\psi}_i(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x_i} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

$$\bar{\psi}_{n+1}(t) = -\frac{\partial H}{\partial t} = -\sum_{a=0}^n \frac{\partial f^a}{\partial t} \bar{\psi}_a$$

Φ -я гамильтониан:

$$H^*(t, x^*(t), \bar{\psi}(t), u(t)) = \varphi_0 f^0 + \varphi_{n+1} \cdot 1 = H(t, \dot{x}(t), \bar{\psi}(t), u(t)) + \varphi_{n+1}$$

$$\Rightarrow M^*(t, x^*(t), \bar{\psi}(t)) = \min_{u \in U} H^*(t, x(t), \bar{\psi}(t), u(t)) = M(t, x(t), \bar{\psi}(t)) + \varphi_{n+1}$$

условие трансверсальности тут будет $\equiv \varphi_{n+1}(t) = 0$

Теорема 10

Пусть $(x(t), u(t))$ опт. пара $(*)$

Тогда $\exists$ вектор $\bar{\psi}(t) \neq 0$

$$\dot{\bar{\psi}}(t) = \frac{\partial H(x(t), \bar{\psi}(t), u(t))}{\partial x}$$

$$1) \forall t \in [t_0, t_1] \Rightarrow H(t, x(t), \bar{\psi}(t), u(t)) = M(t, x(t), \bar{\psi}(t))$$

$$2) \psi_0(t_1) \leq 0, \quad M(t_1, x(t_1), \bar{\psi}(t_1)) = 0 \\ \psi_0(t) = \text{const.}$$

$$3) M(t, x(t), \bar{\psi}(t)) = \int_{t_0}^t \sum_{a=0}^n \frac{\partial f^a}{\partial t} \psi_a dt$$

Если время $(t_1 - t_0)$ зафиксировано.
(точно так же для ψ_0)

Теорема 11

Пусть $(x(t), u(t))$ - оптимальная пара.

Тогда $\exists$ вектор $\bar{\psi}(t) \neq 0$

$$\dot{\bar{\psi}}(t) = - \frac{\partial H(x(t), \bar{\psi}(t), u(t))}{\partial x}$$

$$1) \forall t \in [t_0, t_1] \text{ верно:}$$

$$H(t, x(t), \bar{\psi}(t), u(t)) = \\ = M(t, x(t), \bar{\psi}(t))$$

$$2) \psi_0(t_1) \leq 0, \quad \psi_0(t) = \text{const.}$$

Аналогично для задан с зафикс. временем и
~~координат. компоненты~~ ψ_0 $\in S_0, S_1$
на границе. при трансверсальности $\bar{\psi}(t_1)$ и $\psi(t_0)$ с S_0

Задача с задан. временем и св. правых концов, $S = \mathbb{R}$.

~~Введи x_{n+1} ...~~

ум. transversальности $\psi(t_+) \perp K^n \Rightarrow \psi(t_+) = 0$

из условия $\psi(t) \neq 0 \Rightarrow \psi_0(t_+) < 0$.

Будем считать, что $\psi_0(t_+) = -1$.

Лемма 12

Пусть $(x(t), u(t))$ — опт. пара. в задаче.

Тогда $\exists$ вектор $\bar{\psi}(t) \neq 0$:

$$\dot{\bar{\psi}}(t) = - \frac{\partial H(x(t), \bar{\psi}(t), u(t))}{\partial x}$$

1) $\forall t \in [t_0, t_1]$... очевидно

$$2) \bar{\psi}(t_1) = (-1, 0, \dots, 0)^T$$

Уравнения Беллмана. Достаточные усл. опт-ти

Теорема 1.2

Пусть ф-я $V(x)$

- 1) определена и непрерывна $\forall x \in \mathbb{R}^n$,
 $V(x_1) = 0$, $V(x) < 0$, $x \neq x_1$,
- 2) имеет непрерывный градиент $V'(x)$ при $x \in \mathbb{R}^n$.

Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} (x(t), u(t)), \quad t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \\ x(t) \neq x_1, \quad t_0 \leq t < t_1 \end{array} \right.$$

удовл. условию $(V'(x(t)), f(x(t), u(t))) \equiv 1$,
 $t_0 < t < t_1$.

то он оптимальен по быстродействию,
а время быстродействия $T(x_0) \equiv t_1 - t_0 = -V(x_0)$

Ф-я Беллмана

$$V(x) = -T(x)$$

Ур-е Беллмана

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_{u \in U} (V'(x), f(x, u)) = 1, \quad x \neq x_1 \\ V(x_1) = 0. \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow$

$$\max_{u \in U} \sum \frac{\partial V(x)}{\partial x^i} f^i(x, u) = 1$$

Предположение 1

$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n \exists$ опт. в x_1 со временем
быстродействия $T(x_0)$.

$$T(x_1) = 0, \quad T(x_0) > 0 \text{ при } x_0 \neq x_1.$$

$\Rightarrow V$ "правильно" определена

Предположение 2 . $T(x)$ непрерывна $\forall x \in \mathbb{R}^n$ и имеет
непр. производную $T'(x)$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_1\}$

$\Rightarrow V$ непрерывна и непрерывно дифференцируема.

Ур-е Беллмана и докт. укл. опт. в задаче с управ.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \\ L = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min. \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in \mathbb{R}^n, u \in U, \\ t \in [t_0, t_1] \end{matrix}$$

Ур-е Беллмана $V_t'(x, t) + \max_{u \in U} \{ -f^0(x, u) + \langle V_x'(x, t), f(x, u) \rangle \} = 0.$

Граничное условие: $V(x_1, t_1) = 0.$

Предположение 1 ~~не требуется~~ $V(x, t)$ непрерывна и имеет на $W \subset \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1]$

$$W_0 = \text{int } W \neq \emptyset$$

$$(x_1, t_1) \in \partial W, \quad V(x_1, t_1) = 0$$

Предположение 2 $V(x, t)$ имеет в W_0 локал. экстр.

Теорема

Пусть

1) $V(x, t)$ — значение оптимального управления

2) Если допустимого процесса

$$(x(t), u(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1,$$

$$(x(t), t) \in W_0, \quad t \in (t_0, t_1)$$

выполняется условие:

$$\langle V_x'(x(t), t), f(x(t), u(t)) \rangle + V_t'(x(t), t) - f^0(x(t), u(t)) = 0 \quad \forall t \in (t_0, t_1)$$

10 0.

Тогда произведение отсчетов, отн. зм-ке $\varphi_{\text{н.д.}}$
~~отсчетов~~ равно $V(x_0, t_0)$